BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

COMPTABILITÉ ET GESTION DES ORGANISATIONS

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Session 2016

Durée : 2 heures
Coefficient : 2

Matériel et documents autorisés :

Toutes les calculatrices de poche y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante (Circulaire n°99-186, 16/11/1999).

Documents à rendre avec la copie :

– Annexe ....page 6/6

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet comporte 6 pages, numérotées de 1/6 à 6/6.

<u>EXERCICE 1</u> : (10 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A – Probabilités conditionnelles

Pour contacter une compagnie d'assurances, deux possibilités sont offertes :

- se rendre en agence ;
- à distance par téléphone.

Le responsable du pôle « satisfaction client » décide de réaliser une enquête afin de savoir si les clients que se rendent en agence ou qui contactent la compagnie par téléphone sont satisfaits de l'accueil.

À l'issue de l'enquête, réalisée auprès de 1 000 clients, les résultats sont les suivants :

- 380 se sont rendus en agence,
- parmi les clients qui se sont rendus en agence, 93 % se sont déclarés satisfaits de l'accueil,
- parmi les clients qui ont téléphoné, 15 % ont déclaré qu'ils n'étaient pas satisfaits de l'accueil.

On interroge au hasard un client.

On considère les évènements suivants :

A : « Le client s'est rendu en agence »

S : « Le client est satisfait de l'accueil ».

On rappelle que l'événement contraire de A se note $\bar{A}$, que la probabilité de l'évènement A se note $P(A)$ et que la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé se note $P_B(A)$.

Dans toute cette partie, les probabilités seront arrondies à 10^{-4}, si nécessaire.

1. Donner la valeur des probabilités $P(A)$, $P_A(S)$ et $P_{\bar{A}}(\bar{S})$.

2. L'arbre de probabilités donné en annexe **à rendre avec la copie** représente la situation. Compléter celui-ci.

3. Calculer la probabilité que le client se soit rendu en agence et qu'il ait été satisfait de l'accueil.

4. Montrer que la probabilité de S est 0,8804.

5. Le responsable a pour objectif qu'il y ait moins de 10 % des clients non satisfaits par l'accueil. Cet objectif est-il atteint ?

6. Sachant que le client a été satisfait, quelle est la probabilité qu'il se soit rendu en agence ?

Partie B – Loi normale

La compagnie d'assurances s'intéresse aux coûts des sinistres susceptibles de survenir en 2016 sur les véhicules qu'elle assure. On note X la variable aléatoire qui à chaque sinistre associe son coût en euros.

L'étude des années précédentes permet de supposer que X suit la loi normale d'espérance 1 200 et d'écart-type 200.

1. La compagnie estime que pour l'année 2016, elle devra faire face à 10 000 sinistres. À combien peut-elle estimer le coût de l'ensemble de ces sinistres.

2. Sans utiliser la calculatrice, expliquer pourquoi on peut estimer qu'environ 95 % des sinistres auront un coût compris entre 800 et 1 600 euros.

3. Par la méthode de votre choix, calculer $P(X > 1\,000)$.
   Donner le résultat arrondi à 10^{-2}.

4. À l'aide de la calculatrice, estimer pour l'année 2016 le pourcentage de sinistres dont le coût sera compris entre 1 000 et 1 500 euros.

Partie C – Loi binomiale

Un employé prend au hasard 10 dossiers de sinistres de l'année en cours. Ce tirage est assimilé à un tirage avec remise car le nombre de dossiers est très grand.

On suppose que la probabilité que le coût du sinistre dépasse 1 000 euros est 0,84.

Soit Y la variable aléatoire qui, pour un lot de 10 dossiers pris au hasard, indique le nombre de dossiers du lot dont le coût est supérieur à 1 000 euros.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que dans le lot prélevé par l'employé, tous les dossiers aient un coût supérieur à 1 000 euros. Arrondir la probabilité à 10^{-3}.

3. Calculer la probabilité que l'employé obtienne dans le lot prélevé au moins six dossiers dont le coût est supérieur à 1 000 euros.
   Arrondir la probabilité à 10^{-3}.

EXERCICE 2 (10 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Un formulaire est disponible en fin d'exercice.

Partie A – Étude d'une fonction

L'évolution de la population d'une ville entre le 1er janvier 2015 et le 1er janvier 2016 est modélisée à l'aide de la fonction f, définie sur $[0; 15]$ par

$$f(x) = \frac{40x}{x^2 + 25} + 15$$

Dans ce modèle, $f(x)$ est le nombre d'habitants de la ville en milliers et x le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2015. Par exemple, $f(2)$ est une estimation du nombre d'habitants de la ville (en milliers) au 1er janvier 2017.

1. Calculer le nombre d'habitants de la ville le 1er janvier 2015.

2. On admet que la fonction f est dérivable et on désigne par f' sa fonction dérivée.
   a) Montrer, en détaillant les calculs que, pour tout nombre réel x de $[0; 15]$,
   $$f'(x) = \frac{-40(x-5)(x+5)}{(x^2+25)^2}.$$
   b) Étudier le signe de $x - 5$ sur l'intervalle $[0; 15]$.
   c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0; 15]$, puis le tableau de variation complet de f sur $[0; 15]$.

3. En utilisant le modèle et les résultats obtenus précédemment, à quelle date la population de la ville sera-t-elle maximale et quel sera le nombre d'habitants ?

Partie B – Calcul intégral

On note $I = \int_0^5 f(x)dx$ où f est la fonction définie dans la partie A.

1. La fonction F est définie sur $[0; 15]$ par $F(x) = 20\ln(x^2 + 25) + 15x$.
   Démontrer que F est une primitive de f sur $[0; 15]$.

2. Sans calculatrice, montrer que $I = 20 \ln 2 + 75$, en précisant les étapes du calcul.

3. En déduire une estimation de la population moyenne de la ville entre le 1er janvier 2015 et le 1er janvier 2020. Arrondir cette estimation à la centaine d'habitants.

Partie C – Suites numériques

Dans cette ville, on compare l'évolution de la fréquentation de deux écoles A et B. En 2015, l'école A compte 310 élèves et l'école B en compte 280. On fait l'hypothèse que, chaque année, l'effectif de l'école A augmente de 10 élèves tandis que celui de l'école B augmente de 5 %.

1. Justifier que le nombre d'élèves de l'école B pour l'année $2015 + \mathrm{n}$ peut être modélisé par une suite géométrique $(\mathrm{b_n})$ dont on précisera la raison et le premier terme $\mathrm{b_0}$.

2. La capacité de l'école B est de 450 élèves.
   L'école B pourra-t-elle accueillir tous les élèves prévus par le modèle en 2025 ?

3. La feuille de calcul en annexe présente les prévisions d'effectifs des deux écoles pour les années à venir. Les résultats y sont arrondis à l'unité.
   Quelle formule peut-on écrire en C3 pour obtenir par recopie vers le bas les effectifs de l'école A ?
   Compléter sur **l'annexe à rendre avec la copie** la colonne C avec les valeurs manquantes.

4. On considère l'algorithme ci-dessous.

```
Variables : N entier, A et B réels
Initialisation : N = 0, A = 310 et B = 280
Traitement : TANT QUE A ≥ B
                 affecter à N la valeur N + 1
                 affecter à B la valeur 1,05 * B
                 affecter à A la valeur A + 10
                 Fin TANT QUE
Sortie : Afficher N
```

   Quelle est la valeur de N affichée à la sortie de cet algorithme ?
   Que représente cette valeur de N dans le contexte de l'énoncé ?

Formulaire

Si u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, v ne s'annulant pas sur I, alors la fonction $\frac{u}{v}$ est définie et dérivable sur I, et sa dérivée est donnée par :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Si u est une fonction strictement positive, définie et dérivable, sur un intervalle I, alors la fonction $(\ln u)$ est définie et dérivable sur I, et sa dérivée est donnée par :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

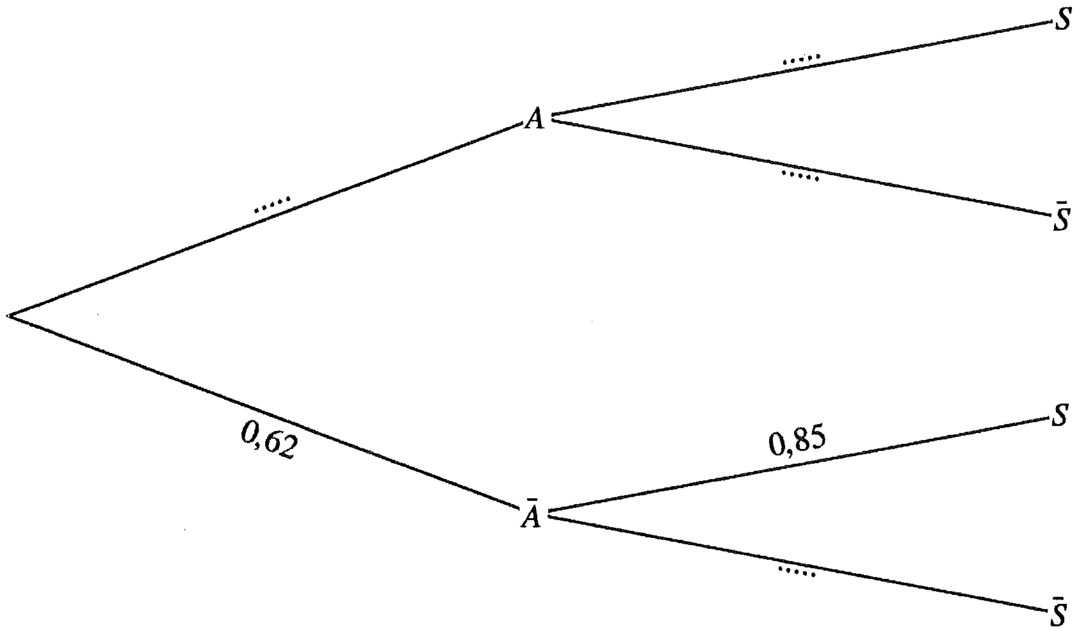
a et b étant deux nombres strictement positifs, on a : $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ (avec $a < b$) alors sa valeur moyenne sur $[a;b]$ est

$$\frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

ANNEXE (À rendre avec la copie)

Exercice 1 – Partie A



Exercice 2 – Partie C

	A	B	C	D
1	Année	n	école A	école B
2	2015	0	310	280
3	2016	1		294
4	2017	2		309
5	2018	3		324
6	2019	4		340
7	2020	5		357
8	2021	6		375